

· 专题学术讲座 ·
(2)

波动理论基础知识及其在 地震工程中的初步应用 (续)

廖 振 鹏

(国家地震局工程力学研究所, 哈尔滨 150000)

· Topical Lecture · (2)

ESSENTIAL KNOWLEDGE ON WAVE THEORY AND ITS PRELIMINARY APPLICATION TO EARTHQUAKE ENGINEERING

Liao Zhenpeng

(Institute of Engineering Mechanics, SSB, Harbin 150000)

(续本刊 1992 年第 12 卷第 3 期第 87 页)

1.3 波阻抗和波动能量

波动传播的物理量既可以是运动学参数, 如位移、速度和加速度, 也可以是其他物理量, 如应力、能量等。本节将从应力和波动能量传播的角度进一步讨论波动传播概念和各个物理量之间的联系。此外, 为了确定式 (8) 的一般解 (12) 中函数 f 和 g 的具体形式, 必须考虑问题的初始条件和边界条件。本节将通过一个简单的边值和初值问题的求解展开讨论。

1.3.1 一个简单的边值问题

我们来分析图 1-5 所示的边值和初值问题。假定在 $t < 0$ 时均匀、各向同性的弹性半空间 ($x \geq 0$) 内介质为静止。当 $t = 0$ 时突然在界面 $x = 0$ 处加上不随时间变化的均匀分布剪应力 τ_0 , 问题为求解由此产生的弹性波位移场 $u(x, t)$

显然, 在边界面上作用的剪应力将在半空间内产生弹性剪切波, 其控制方程为一维标准波动方程 (8)。一般解式 (12) 中波动函数 f 和 g 的具体形式应由如下边界条件和初始条件决定。

边界条件:

$$\tau(0, t) = \tau_0 H(t) \tag{20}$$

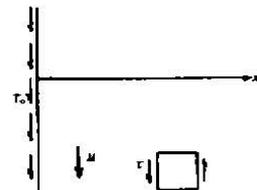


图 1.5 均匀剪应力作用于
均匀弹性半空间的
表面

Fig. 1.5 Homogeneous shear
stress acting on the surface
of uniform elastic half
space

其中 $H(t)$ 为单位阶梯函数, $t < 0$ 时, $H(t) = 0$; 当 $t > 0$ 时, $H(t) = 1$ 。

初始条件:

$$u(x, 0) = 0 \quad (21)$$

由于没有波动能量来自右方 ($x = \infty$), 因而一般解 (12) 中第二项 g 为零, 质点位移写成

$$u(x, t) = f(t - x/c_s) \quad (22)$$

式中 $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, 为介质的剪切波速。应力应关系为

$$\tau(x, t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (23)$$

式中负号是由于位移 u 和应力 τ 的正方向规定 (见图 1-5) 引入的。将式 (23) 和 (22) 代入式 (20) 可得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{c_s \tau_0}{\mu} H(t) \quad (24)$$

将上式对 t 积分, 并注意初始条件式 (21) 得到

$$f(t) = \frac{c_s \tau_0}{\mu} t H(t) \quad (25)$$

因此质点位移式 (22) 成为

$$u(x, t) = \frac{c_s \tau_0}{\mu} \left(t - \frac{x}{c_s}\right) H\left(t - \frac{x}{c_s}\right) \quad (26)$$

对 t 求偏导数得质点速度为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_s \tau_0}{\mu} H\left(t - \frac{x}{c_s}\right) \quad (27)$$

将式 (26) 代入 (23) 得到如下应力表达式:

$$\tau = \tau_0 H\left(t - \frac{x}{c_s}\right) \quad (28)$$

式 (26-28) 表明, 在扰动传到之前波场是静止的, 扰动传到以后, 质点的速度及应力为常数, 位移随时间线性增加。非扰动区与扰动区的界面称为波前 (Wavefront), 在波前上要满足运动学条件, 即位移是连续的, 而速度和加速度则可能是间断的。式 (28) 表明, 应力也以波动向前传播, 称为应力波。

这个简单的力学模型可以用来估计震源附近的地震动强度。按照目前对震源过程的认识, 地震是岩石中逐渐积累的应力突然在断裂面 (断层) 上释放的结果。对最常见的剪切破裂断层, 这相当于破裂面两岸作用的有效剪应力 τ 。瞬时释放, τ_0 称为应力降, $\tau_0 = \sigma_0 - \sigma_f$, σ_0 为初始应力, σ_f 为终应力, 一般情况下终应力不一定为零。 τ_0 是衡量震源动力学强度的一个主要参数。应力降 τ_0 产生的地震波可以通过在破裂面两岸突然施加剪应力 τ 来求解, 对于接近断层中心观测点的观测点, 当断层面边界的影响到达观测点之前, 其运动状态可用图 1-5 所示的模型分析。当边界的影响传到观测点之后, 它的位移应趋于常数, 速度则逐渐减少并于趋于零。由式 (27) 可以估计近场质点速度的上界为

$$\frac{\partial u}{\partial t}_{\max} = \frac{c_s \tau_0}{\mu} \quad (29)$$

即断层附近地震动最大速度与应力降 τ_0 及剪切波速 c_s 成正比, 与震源处岩石的剪切刚度 μ 成反比。以这一简单的边值和初值问题的解为起点建立的震源模型及其应用将在讲座后面讨论。

1.3.2 波阻抗

对比式 (27) 及式 (28) 可得

$$\tau = \frac{\mu}{c_s} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c_s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (30)$$

式 (30) 表示驱动质点运动的应力与质点速度成正比, 比例因子 ρc_s 称为波阻抗。这是一个表示传播介质的重要参数。通过波阻抗, 应力波与速度波联系起来。它的物理意义是表征介质对波动的传送能力。下面将会看到, 它决定了介质对波动能量的传递率, 此外, 当波遇到不同介质的分界面时, 反射与透射的能量也取决于两种介质的波阻抗之比。

对于一般形式的一维波动 $u=f(x-ct)$ 或 $u=g(x+ct)$, u 对时间和空间的偏导有下列关系:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mp c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (31)$$

则应力波与速度波之间有如下关系

$$\tau = \pm \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (32)$$

式中正负号取决于应力和位移正方向的规定。对表 1-1 所列出的各种一维波动, 式 (32) 中各个物理量应按表中说明做相应的物理解释。例如, 对于平面纵波, τ 为正应力, ρ 和 c 分别为介质质量密度和纵波波速, $\partial u/\partial t$ 为质点纵向振动速度。

1.3.3 波动能量

(1) 波动的能量密度 W

弹性波在介质某一点单位体积内激起的全部能量 (包括动能和位能) 称为波动的能量密度, 用记号 W 表示。以平面剪切波为例, 单位体积内的动能与位能分别为

$$T = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (33)$$

$$V = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (34)$$

注意到式 (31) 和波速 $c = \sqrt{\mu/\rho}$ 可得

$$T = V \quad (35)$$

所以, 波的能量密度为

$$W = V + T = 2V = 2T \quad (36)$$

这个结论对更一般的情况也成立。它表明, 当波穿过介质时, 单位体积的动能和位能总是相等的, 同时增大或减小。这个特点和保守系统振动的能量分配完全不同, 后者动能和位能的变化趋势相反, 但二者总和保持不变。

(2) 能流密度 w

能流密度是表示波动能量传送快慢的参数, 它定义为单位时间内穿越与波行进方向垂直的单位面积的波动能量。显然, 能流密度 w 可以表示成作用与传播方向垂直的平面上的应力与在应力作用方向上的质点速度的乘积。对于一维剪切波有

$$w = \tau \frac{\partial u}{\partial t}$$

将式 (30) 代入上式得

$$w = \rho c_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (37)$$

该式表明, 波所携带能量在介质中的传送率取决于波阻抗。对比式 (37) 和式 (33) 知

$$w = c_s \cdot 2T = c_s W \quad (38)$$

式 (38) 表明介质中贮存的全部波动能量 (包括动能和位能) 也是以波速 c 沿着波传播方向移动的。

以上结果可用于估计一次震辐射的总能量。如果在某观测台站取得了一次地震记录, 由该记录可以按式 (33) 估算出动能密度 T , 再用式 (38) 估计地震波的能流密度 w , 这时要注意式中因子 2, 它表示总能密度应为动能与位能能源密度之和。根据算得的 w , 再加上对地震波强度随距离衰减的某种判断之后, 便可以对该次地震射出的地震波总能量作数量级估计。

1.4 谐波分析

1.4.1 简谐波

谐波分析是研究波动问题的一个非常有效的方法, 这个方法是建立在简谐波概念之上的。简谐波是一种简单的行波, 就一维波动而言, 它的波形随空间坐标 x 成简谐变化, 同时, 在空间给定点的振点也具有简谐形式。简谐波由下列表达式定义

$$\begin{aligned} \text{或} \quad u &= U \sin \omega (t \pm x/c) \\ u &= U \cos \omega (t \pm x/c) \end{aligned} \quad (39)$$

式中 U 称为振幅, ω 为圆频率, c 为波速。在波动分析中通常采用简谐波的复数表达形式

$$u = U \exp [i\omega (t \pm x/c)] \quad (40)$$

在自然界中任何物理量都是实数, 复数表示法完全是为数学分析的方便而引入的。复数只在分析过程中出现, 虚数部分将在计算过程中自行消去, 结果仍然是实数。就单个复数形式的简谐波 (式 (40)) 而言, 其物理意义可以按它的实部或虚部 (式 (39)) 来理解。

显然, 如果简谐波表达式中的波速 c 是标准波动方程 (8) 的常数 c , 则简谐波满足式 (8)。这是因为式 (40) 或 (39) 中的自变量是波动自变量 $t \pm x/c$ 。

除去振幅因子 U 外, 简谐波用两个独立的运动学参数 ω 和 c 描述。前者描述质点振动特征, 后者描述波传播特征。描述振动特征的另外两个常用的参数是质点振动周期 T 和频率 f 。 ω 、 T 和 f 的关系如下:

$$T = 2\pi/\omega \quad (41)$$

$$f = 1/T \quad (42)$$

描述简谐波的两个常用的参数是波长 λ 和波数 k , 它们由下式定义

$$\lambda = cT \quad (43)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (44)$$

λ 为简谐波波形随空间坐标 x 变化的周期, 与质点振动周期 T 相对应; k 为 2π 单位长度内波的个数, 与质点振动圆频率相对应。 λ 和 k 描述简谐波的波形特征。在简谐波的振动特征 (T 、 f 和 ω)、传播特征 (c) 和波形特征 (λ , k) 中可以任选两个参数作为描述简谐波的独立参数。因此, 简谐波 (40) 可以写成其他形式, 例如

$$u = U \exp [i(\omega t \pm kx)] \quad (40)$$

简谐波也称为稳态波 (Steady-state wave)。它是在时间上和空间上都没有起点也没有

终点的周期性波动。可以设想在均匀弹性介质内的充分远处, 一个无穷大的刚性平面震源始终作简谐振动, 在经过很长时间后形成的稳定波形就是简谐波。与此相对, 在自然界中实际存在有象地震波那样暂态波 (Transient wave), 暂态波引起的质点振动通常是在时间上有起点也有终点的非周期性运动, 暂态波在空间上展布的区域也是有限。虽然在自然界中并不存在简谐波, 但是, 它是研究暂态波的一个非常有用的概念。这是因为: 第一, 对于线弹性介质, 运用付立叶 (Fourier) 变换方法可以把暂态波问题转化为比较简单的稳态波问题, 第二, 不同于用一个运动学参数 c 描述的定型波, 简谐波用两个独立的运动学参数 ω 和 c 描述, 因此, 它可以用来处理一系列定型波不能处理的有重要实际意义的波动问题。下面将以这两点为中心展开讨论。

1.4.2 定型波和非定型波的谐波分析

a. 定型波的谐波分析

考虑标准波动方程 (8) 的定型波一般解式 (12), 利用付立叶变换, 定型波 (式 (12)) 可以看作一系列简谐波的迭加:

$$u = 2\text{Re} \int_0^{\infty} U(x, t, \omega) d\omega \quad (45)$$

其中谐波基本解为:

$$U(x, t, \omega) = E \exp(i(\omega t + kx)) + F \exp(i(\omega t - kx)) \quad (46)$$

$$\frac{F(\omega)}{E(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \exp(-i\omega t) dt \quad (47)$$

式中 (47) 中 $F(\omega)$ 和 $E(\omega)$ 为待定的频率函数, $k = \omega/c$ 。对于每一个给定的 ω 值, 式 (46) 表示两个简谐波, 它们分别以相速度 c 沿 x 轴负向和正向传播, c 与圆频率 ω 无关。所有频率的谐波都以相同的波速传播, 所以在传播过程中波形不变。

对于定型波问题, 我们可以先在频域内根据边界和初始条件由频域基本解 (46) 确定频谱 $U(\omega)$, 然后按式 (45) 反演求得暂态解。因此, 所有能够用定型波研究的暂态问题都可以用简谐波分析代替, 替换的结果常常使分析工作获得极大简化。

b. 非定型波的谐波分析

定型波概念只能用于分析用标准波动方程式 (8) 控制的波动的现象。如果介质的运动微分方程不具有标准波动方程的形式, 则定型波分析方法失效。谐波方法可以用于处理较式 (8) 更为广泛的运动微分方程。例如, 设介质的运动微分方程为

$$L(u) = 0 \quad (48)$$

式中 $L(u)$ 常系数齐次线性偏微分算子。引入付氏变换

$$U(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (49)$$

则式 (48) 变换成 n 阶常系数齐次线性常微方程

$$L_n(U(x, \omega)) = 0 \quad (50)$$

式 (50) 的一般解可以写成

$$U(x, \omega) = \sum_{n=1}^r \alpha_n e^{-\mu_n x} \quad (51)$$

式 (51) 中 n' 常微分方程的特征方程不同根的个数。将 $U = e^{-\mu x}$ 代入式 (50) 得

$$P(k_n) = 0 \quad (51)'$$

n 阶代数方程式 (51)' 的根可以写成

$$k_m = k_m(\omega) \quad (52)$$

式 (52) 称为频散关系。当 (51)' 无重根, $n' = n$, 式 (51) 中系数 a_m 常数, 当式 (51)' 有 r 重根时, a_m 为 χ 的 $r-1$ 阶多项式。对式 (51) 做付氏反变换则得

$$u(x, t) = 2 \sum_{m=1}^n a_m \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp i(\omega t - k_m(\omega)x) d\omega \quad (53)$$

式 (53) 表明, 运动微分方程的一般解仍可表示为一系列谐波的叠加, 但是, 每一谐波的相速度

$$C_m(\omega) = \frac{\omega}{k_m(\omega)} \quad (54)$$

与频率相关。因此, 振动时程曲线的形状以及波形均在波动传播过程发生变化。此外, $k_m(\omega)$ 可能为虚数或复数。前者使简谐波退化为非行进波, 后者则兼有行进波和非行进波两种成分。当简谐波表达式中波数 k 被推广到复数域, 则称之为广义谐波, 广义谐波概念在第二章中还要专门讨论。

作为一个例子, 我们考虑弯曲变形均匀直杆的横向运动。如果直杆仅发生弯曲变形, 杆截面除作刚性旋转外大小和形状都不变, 则均匀直杆的横向运动微分方程可写成,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (55)$$

式中, $a^2 = EI/\rho A$, EI 为变曲刚度, A 为横截面积, ρ 为介质质量密度。对式 (55) 作付氏变换得

$$a^2 \frac{d^4 U}{dx^4} - \omega^2 U = 0 \quad (55)'$$

上式的特征方程的解可以表示成,

$$k_m = i^{m+1} \sqrt{\omega/a}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (56)$$

式 (55)' 的一般解成为

$$U(x, \omega) = \sum_{m=1}^4 a_m e^{-ik_m x} \quad (57)$$

$m=1$ 和 $m=3$ 的基本解分别表示沿 x 轴负向和正向传播的行波。它们的波数

$$k = \sqrt{\omega/a} \quad (58)$$

相应的相速度

$$c(\omega) = \sqrt{a\omega} = ak \quad (59)$$

相速度按照与频率的平方根成正比的规律增加。因此, 变曲变形杆中的行波在传播过程中波形是变化的。当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 相速度 $c(\omega) \rightarrow \infty$ 。这是违背波动不可能瞬时传送这一物理机制的。这个矛盾源于弯曲变形的假定, 如果考虑转动惯量以及剪切变形的影响, 或直接按照弹性理论建立频散关系, 则相速度有限。当 $m=2$ 和 $m=4$ 时, 特征值 k_m 为实数, 即波数为虚数。此时基本解退化为沿 x 轴的衰减或放大的振荡。在一般情形下, 运动微分方程 (55) 既有频散的行波解, 又有退化的非行波解, 但所有基本解都可以用广义谐波的形式表示。

1.4.3 波群与群速度

在由线性运动微分方程控制的波动问题中, 组成波场的各谐波的相速度一般是频率的

函数, 因而各谐波在传播过程中因快慢不一而不能同步, 经过一段时间后, 合成的振动和波形就变形了, 这称为频散现象。直杆中纯弯曲波就是一种频散波。由简谐波定义式 (40) 看出, 当波速 c 常数时, 由传播距离 x 而引起的谐波相的变化 $(\omega/c)x$ 是与频率 ω 成正比的, 所以波在传播过程中波形不变。如果相速 c 随频率而变, 则相位变化与 ω 不成正比, 一定会造成频散。

波动的本质特征是能量的传播。就给定频率的波动而言, 能量的传播就是振幅的传播。可以证明, 任一无限窄频带上的频散波的振幅不以相速度传播。因此, 波动能量的传播一般不能用相速度描述, 我们需要引入新的概念来描述频散波的传播特征。这就是波群和群速度的概念。这些概念可以通过充分小频段上满足频散关系的谐波的叠加来引入。

a. 两个谐波叠加

设两个波幅相等, 频率及波数相近的两个谐波 $u_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ 与 $u_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ 沿相同方向传播。两者叠加的结果可以写成

$$u = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x\right) \cos(\omega t - kx) \quad (60)$$

其中 $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega = (1/2)(\omega_1 + \omega_2)$, $k = (1/2)(k_1 + k_2)$, 由于频散关系 (52) 通常是连续的, 当 ω_1 接近于 ω_2 时, k_1 接近 k_2 , 则 Δk 及 $\Delta\omega$ 均为小量, 其合成波形见图 1.6。可经看出, 式 (60) 的第一个因子是合成波形的包络线, 通常称为波包或调制皮, 第二个因子为高频载波。由这两个谐波组成的波群所携带的能量的传播速度是波包的传播速度, 称为群速度。显然, 由式 (60) 第一个因子可知群速度为

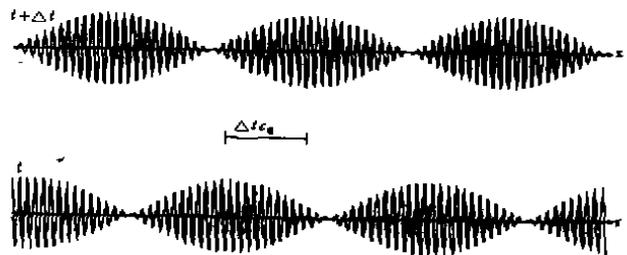


图 1.6 两个谐波叠加形成的稳态波群

Fig. 1.6 Steady wave state group formed by stacking of two harmonic waves

$$C_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (61)$$

当 $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ 时

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (62)$$

在频散的情况下, C_g 与相速度 $C = \omega/k$ 一般是不相同的, 即波群与载波以不同速度传播, 所以, 波群内的载波的相位在不断地变化。

b. 窄带谐波叠加

如式 (52) 所示, 实际上可能遇到的是具有连续频谱的一系列简谐波的叠加。下面考虑以某个频率 ω_0 为中心的窄频带内谐波的叠加。设频带宽为 $\Delta\omega$, 频谱密度为 $u(\omega)$, 则由式 (53) 知叠加波形应为

$$u = 2\text{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} U(\omega) \exp[i(\omega t - k(\omega)x)] d\omega \quad (63)$$

假设频带宽度 $\Delta\omega$ 很小, $U(\omega)$ 近似常数 U_0 , 在式 (63) 积分区间内将波数 $k(\omega)$ 在 ω_0 附近作泰勒展开, 由于 $\Delta\omega$ 很小, 略去二阶以上小量后可得

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) (dk/d\omega)_0 \quad (64)$$

式中 $k_0 = k(\omega_0)$, $(dk/d\omega)_0 = dk/d\omega|_{\omega=\omega_0}$, 将式 (64) 代入 (63) 完成积分运算后得到

$$u = F\left(t - \frac{x}{C_g}\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0) \quad (65)$$

式中

$$F\left(t - \frac{x}{C_g}\right) = 2|U_0| \frac{\sin \zeta}{\zeta} \Delta \omega \quad (66)$$

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (67)$$

$$\zeta = (t - x/c_g) \Delta \omega / 2 \quad (68)$$

$U_0 = U(\omega_0)$, φ_0 为 U_0 的幅角。对于给定时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$, 或 (65) 给出的波形示于图 1-7。可以看出, 在合成波动中能量集中于一个主要波包, 波包的包络线形状由式 (65) 中的 $F(t - x/c_g)$ 控制, 并以群速度 C_g 向前传播。因而每个窄频带波群的包线在传播过程中是不变形的。如果在频带 $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$ 上考虑频谱密度 $U(\omega)$ 的变化, 或在波数展开式 (64) 中计入高阶小量, 则波包也可能散开。因此, 图 1-7 所示的波群特征只适用于充分窄频内频散波的叠加。

群速度与相速度的关系可由群速度定义式 (67) 导出, 注意到 $\omega = kc$ 并将波数 k 视作独立自变量, 则

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} \quad (69)$$

如果波速与波数无关, 即无频散, 则群速度与相速度相等。若取波长 λ 为自变量, 注意到 $k = 2\pi/\lambda$, 可得

$$C_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (70)$$

通常, 对 $dc/d\lambda > 0$ 情形称为正常频散, 反之为反常频散。对于无限长匀直杆中的弯曲波, 频散关系 (58) 可以写成

$$\omega = ak^2$$

群速度为

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = 2ak \quad (71)$$

将式 (58) 代入上式可知 $C = 2C$, 即群速度为相速度的两倍。且由式 (59) 看出相速度 C 与波长成反比。所以直杆中弯曲波的频散多反常频散。

(待续)

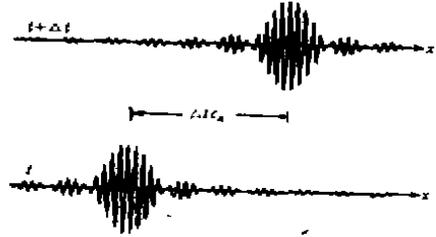


图 1.7 充分窄频带内谐波叠加形成的波群
Fig. 1.7 Wave group formed by stacking of harmonic waves in the adequate narrow band