

• 专题学术讲座 •

# 波动理论基础知识及其在 地震工程中的初步应用

廖振鹏

(国家地震局工程力学研究所, 哈尔滨)

• Lecture on a Special Topic •

## ESSENTIAL KNOWLEDGE OF WAVE THEORY AND ITS PRELIMINARY APPLICATION IN EARTHQUAKE ENGINEERING

Liao Zhenpeng

(Institute of Engineering Mechanics, SSB, Harbin)

**编者按** 为配合地震综合预防、减灾活动, 本刊从此期起首次组织有关地震、波动理论及工程应用的专题系列讲座。廖振鹏教授长期从事近场强地震学研究, 在地震波动理论与工程实践方面成绩卓著。本讲座是作者为工程力学研究所(原中国科学院, 现国家地震局)研究生自 1979 年起开设的课程“地震工程中的波动问题”(讲义)的一部份, 简明而有特色地介绍波动理论的基本概念和方法及其在地震工程中的初步应用。本刊承作者之允, 希望通过这一讲座有助于对该领域感兴趣的读者进一步掌握波动理论的基础知识, 并将其与工程应用结合起来, 为推动地震工程领域内一系列极为重要的问题的解决作出贡献。

### 引 言

本讲座通过对一维波动现象的分析介绍波动的基本知识及其在地震工程中的初步应用。在一维波动问题中, 仅用一个空间坐标就能确定波场的空间分布, 因而求解一维波动方程可以避免多维空间造成的数学困难, 有利于阐明波动过程的物理概念和波动问题分析方法的实质。另一方面, 一维波动模型简单明了, 运用得当也能够模拟实际介质运动的主要特征, 这使它在地震工程研究中获得了许多应用。例如, 估计工程场地土质条件对地震地面运动的影响通常采用一维波动模型。在研究上部结构的地震反应时, 常把结构简化为一维伸臂杆, 从而结构的地震反应也可以用一维波动模型加以研究。强震地面运动和结构

地震反应的观测结果表明, 在一些情况下, 一维波动模型可以很好地模拟土层和上部结构地震反应的本质过程。所以, 一维波动分析在波动理论及实际应用两方面都有重要作用。

本讲座第一部分介绍一维波动理论的基本概念和分析方法, 这些概念和方法也是研究更复杂的波动问题所必须具备的基本知识。第二部分讨论一维波动理论在研究复盖土层地震反应中的应用。第三部分讨论伸臂结构的地震反应, 并将这一讨论推广到结构—刚性基础—弹性地基地震反应的一般情形, 最后以此基础概述了地震工程中主要的波动问题。

## 1 一维波动理论的基本知识

连续弹性介质的运动微分方程是波动理论的基础, 我们首先分析建立运动微分方程的思路及主要环节, 并通过一维标准波动方程的建立过程加以说明。在导出标准波动方程的一般解之后, 讨论了它的物理意义, 着重阐明它的自变量所表达的波传播概念。这个将空间和时间坐标组合起来的自变量 (即称为波动自变量) 是任何行波表达式必不可少的组成部分。接着, 用一个简单的边值问题引入了波阻抗及波动能量的概念, 它们从另一个侧面描述波传播现象的基本特征。简谐波概念和在其基础上建立的谐波分析方法是解决波动问题的有力手段, 贯穿本书始终。这里介绍有关的基本知识, 并用以讨论弹性波频散的基本概念以及非弹性线性介质的阻尼效应。

### 1.1 一维标准波动方程

#### 1.1.1 建立运动微分方程的原理

连续介质力学的运动微分方程是波动分析的数学基础, 它可以根据经典力学建立。这类方程的基本原理可归纳如图 1-1 所示。

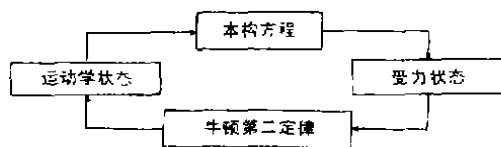


图 1-1 建立运动微分方程的原理

Fig. 1-1 The principle of establishing motion differential equation

连续介质内任一点在任一时刻  $t$  的动力学状态包括它的运动学状态和受力状态两个方面。前者一般用位移、速度、应变、应变速度等参数描述, 后者则用应力、体积力等参数描述。动力学状态的这两个方面是相互转化的, 这一转化通过本构方程和牛顿第二定律实现。本构方程反映运动学状态和受力状态的对应关系, 一旦确定了某一时刻  $t$  的

运动学状态, 则在  $t$  时刻的受力状态由本构方程决定。一旦确定了  $t$  时刻的受力状态, 则在  $t+\Delta t$  时的运动学状态由牛顿第二定律确定。反映动力学状态时空变化规律的运动微分方程就是上述运动和受力两状态相互转化的数学表达。事实上, 这一相互转化关系使连续介质内任一微分体积元在  $t+\Delta t$  时刻的动力学状态完全取决于它在  $t$  时刻的状态, 从而规定了连续介质运动变化的规律性。综上所述, 运动微分方程的建立在于综合以下四个环节: 运动学状态的规定, 受力状态的规定, 本构关系的建立和应用牛顿第二定律。前面三个环节合起来就是所谓力学模型, 因为这三个环节均有特殊性, 具体问题的力学模型也具有极强的特殊性, 要具体问题具体分析, 这是建立合理的运动微分方程的关键所在; 最后一个环节具有普遍性, 我们应熟练掌握用各种形式表达牛顿第二定律的数学方法。因此, 为了建立适用于特定情况的运动微分方程, 首先要研究前面三个环节的特殊性, 建立有针对性的、

既能模拟实际情况又简便实用的力学模型, 然后用牛顿第二定律列出运动微分方程。上述思想对于将实际工程力学问题“翻译”为数学力学问题具有普遍性, 对于建立连续模型或离散模型、线性问题或非线性问题以及微分元或有限体系的运动微分方程都适用。如果考虑介质所处物理状态(如温度、电磁场等)与运动状态、受力状态和本构关系的相互影响, 上述思想也是建立更广泛的应用力学运动微分方程的基础。下面以建立完全弹性体的一维标准波动方程来说明上述思路。

### 1.1.2 一维标准波动方程的建立

我们考虑均匀剪切变形直杆的横向运动。所谓剪切变形直杆是指杆的横截面仅在与杆轴垂直的方向上平移, 同时在平移过程中截面形状和大小保持不变(图 1-2)。因此, 杆的运动状态完全由直杆轴线的横向位移  $u$  描述

$$u = u(x, t) \quad (1)$$

空间坐标  $x$  固定在未变形状态的杆轴上,  $t$  为时间坐标。这个力学模型很简单, 但在地震工程中很有作用。因为在一定条件下, 这个简单模型抓住了问题的关键。例如, 研究在水平地震地面运动作用下多层框架房屋的整体地震反应可以采用这样的力学模型。严格地说, 水平地震运动引起的多层框架房屋的变形很复杂: 不仅有楼层间的错动, 而且楼层的横梁和楼板要变形, 立柱也会发生纵向变形。然而在许多情况下层间柱子的抗剪刚度远小于其纵向刚度, 而楼板及横梁变形对结构整体变形的影响也不大, 因此, 框架房屋的整体

变形主要受层间错动控制。由于作用在房屋上的水平地震力主要取决于整体运动, 因此, 就估计作用在多层框架房屋上的水平地震力而言, 剪切变形杆是一个合理的模型。对多层框架房屋自振周期的实测结果表明这个十分简单的模型具有相当高的精确性, 即实测的整体自振频率非常接近于理论模型的推测值。

剪切变形直杆的运动学参数可以由式(1)导出。例如, 剪应变  $\gamma$  由下式定义(见图 1-2)。

$$\gamma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

由于直杆只有剪切变形, 它的受力状态可以用于横截面上的剪力  $F$  描述(图 1-2), 它也是一维空间坐标  $x$  和时间  $t$  的对函数

$$F = F(x, t) \quad (3)$$

对于完全弹性剪切变形杆, 本构方程表示剪力  $F$  和剪应变  $\gamma$  的对应关系

$$F = f(\gamma) \quad (4)$$

把式(4)右端按泰勒(Taylor)级数展开, 并保留到一阶小量  $\gamma$

$$F = K\gamma \quad (5)$$

这是应力与应变成正比的线性本构关系, 是胡克(Hooke)定律的一维表达式。式中弹性系

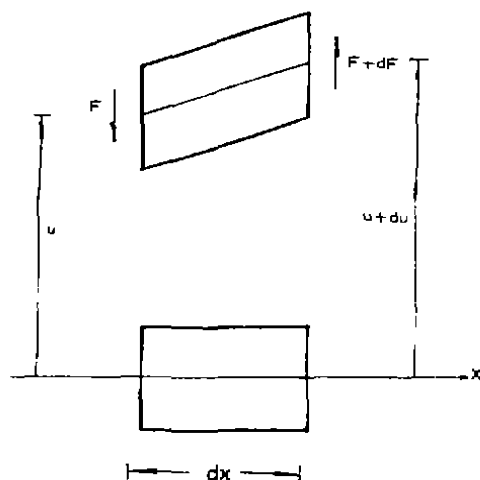


图 1-2 匀直剪切杆的横向运动和变形

Fig. 1-2 Sideways movement of uniform direct shear trunk and its deformation

数  $K$  具有量纲 [力/长度], 称为直杆的剪切弹性模量。式 (5) 成立的条件是

$$|\gamma| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1 \quad (6)$$

即小应变情形。

将牛顿第二定律应用于图 1-2 所示匀直剪切变形杆元  $dx$  得到

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F = m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

式中  $m$  为直杆单位长度的质量。

将本构关系式 (5) 代入式 (7) 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

其中

$$c = \sqrt{K/m} \quad (9)$$

方程 (8) 即为一维标准波动方程。参数  $c$  是描述波动的重要参数, 称为波速。

## 1.2 标准波动方程解答及其物理意义

### 1.2.1 标准波动方程的一般解及波动自变量

方程 (8) 的一般解可以用初等方法求出。作变量代换

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned} \quad (10)$$

用链式微分法则容易证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

将这些表达式代入式 (8) 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (11)$$

上式的一般积分为

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (12)$$

一般解 (12) 中  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  是两个任意函数。文献中称式 (12) 为达朗贝尔 (D'Alembert) 解。

一般解的第一项  $f(x - ct)$  表示以波速  $c$  沿  $x$  轴正向传播的波, 第二项  $g(x + ct)$  表示以波速  $c$  沿负  $x$  轴方向传播的波。下面对上述物理含意做一直观说明。首先考虑式 (12) 中的第一项, 设  $u(x, t) = f(x - ct)$ 。图 1-3 示出相对于静止坐标轴  $x$  在两个不同时刻  $t=0$  和  $t=t_1$  时波形, 即位移  $u$  相对空间坐标  $x$  变化的图形。设想一位观察者以均匀速度  $c$  沿着  $x$  轴正方向移动, 假定在观察者身上固定一条与静止轴  $x$  指向相同的坐标轴  $x'$ , 且  $x'$  轴的原点就是观察者。设观察者正好在  $t=0$  时刻到达静止坐标轴  $x$  的原点  $x=0$ , 此时观察者看到的波形就是  $u$  随坐标  $x'$  的变化  $f(x')$ 。这是因为, 在  $t=0$  时刻,  $x'$  轴与  $x$  轴原点重合,  $x' = x$ 。在  $t=t_1$  时刻, 观察者移动了距离  $ct_1$ , 静止轴上任一点的坐标在观察者看来为  $x' = x - ct_1$ , 因此, 观察者看到的波形仍是  $f(x')$ , 即设想的观察者在不同时刻看到的波形是不变

的。换言之, 这一波形  $f(x')$  是随着观察者以相同速度  $c$  向着  $x$  轴正方向移动。用类似方法可以看出,  $g(x+ct)$  表示沿着负  $x$  轴方向以速度  $c$  传播的波动。由此可见, 波动方程 (8) 中的常数  $c$  表示波传播速度。

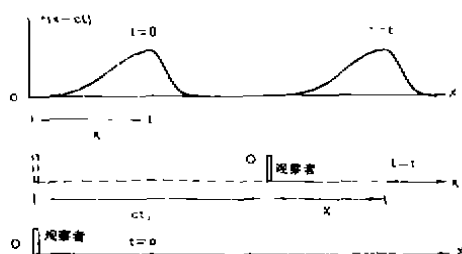


图 1-3 一维行波示意图

Fig. 1-3 Sketch map of one-dimensional S wave

任何一点的扰动要传到另一点需要一定的时间, 这是波动现象所具的本质特征, 波动理论对这一特征的反映是传播量  $u$  的自变量由时间  $t$  和空间坐标  $x$  的特定组合  $\xi$  或  $\eta$  (式 (10)) 实现的。只要  $u$  可以写成  $\xi$  或  $\eta$  的函数, 那么量  $u$  就以波速  $c$  传播。 $\xi$  或  $\eta$  称为波动自变量, 它是任何行波表达式中必不可少的组成部分, 是今后经常使用的概念。由于波速度  $c$  为常数, 波动自变量也可以写成其他形式, 例如,  $\frac{x}{c} \mp t$ ,  $t \mp \frac{x}{c}$ , 等。因此, 一维标准波动方程的一般解式 (12) 也可以写成其他形式, 如

$$u(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c) \quad (12)$$

式中  $f$  和  $g$  为任意函数。

### 1.2.2 标准波动方程的适用范围

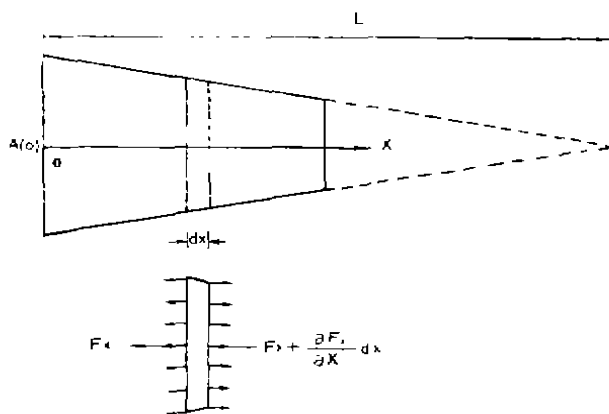


图 1-4 正锥形杆的纵向运动

Fig. 1-4 Pitching of orthopyramid trunk

虽然式 (8) 是从匀直杆的剪切横向运动导出的, 但它适用于一系列物理性质极为不同的波动问题。作为一个例子, 我们考虑图 1-4 所示的正截锥形弹性杆的纵向运动。作为一级近似, 杆的纵向运动可以用杆的横截面沿杆

轴平行移动描述, 且截面在平移过程中不变形。也就是说用截面纵向位移  $u_x = u_x(x, t)$  可以完全描述杆的运动状态。相应的受力状态可以用作用在截面上的轴向力  $F_x = F_x(x, t)$  描述。根据线弹性本构方程

$$F_x = A(x)E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (13)$$

式 (13) 中  $E$  为直杆介质的杨氏模量,  $A(x)$  为截面面积, 参照图 1-4 将牛顿第二定律应用于杆元  $dx$ , 可得变截面直杆的如下纵向运动微分方程

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{A(x)} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (14)$$

其中

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (15)$$

$\rho$  为直杆介质质量密度。对正截锥形杆而言,

$$A(x) = A(0)(1 - \frac{x}{L})^2 \quad (16)$$

式中  $L$  为具有长度量纲的常数, 其几何意义见图 1-4,  $A(0)$  为正截锥形杆底面积, 将式 (10) 代入式 (14) 得到

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{2}{x-L} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (17)$$

令

$$u_x = \frac{u}{x-L} \quad (18)$$

式 (18) 中  $u$  为  $x$  与  $t$  的函数, 具有长度平方的量纲, 则式 (17) 成为式 (8)。因此, 正截锥形杆中纵向运动的一般解可由标准波动方程的一般解式 (12) 按式 (18) 确定。对于均匀直杆  $L=\infty$ , 式 (17) 化为标准波动方程。由此可知, 匀直杆中纵向振动的传播和横向振动的传播服从相同的数学规律。虽然两者的物理性质完全不同: 前者质点振动方向与传播方向一致, 依靠介质的压缩和伸张弹性推动振动的传递, 称为纵波, 波速由式 (15) 确定; 后者质点运动方向与波传播方向垂直, 依靠介质的剪切弹性推动的传递, 称为横波, 波速由式 (9) 确定。

表 1-1 汇集了若干常见的一维波动模型, 它们的运动微分为方程均为标准波动方程 (8)。

表 1-1 常见的一维波动模型

Tab. 1 Mode of normal one-dimensional wave motion

波动模型	$u$ 的物理意义	波速 $c$
均匀剪切梁横向运动	横向位移	$\sqrt{K/m}$ $K$ —剪切刚度, $m$ —单位长质量
均匀弦线横向运动	横向位移	$\sqrt{T/m}$ $T$ —弦内张力, $m$ —单位长质量
均匀直杆纵向运动	纵向位移	$\sqrt{E/\rho}$ $E$ —杨氏模量, $\rho$ —质量密度
正锥形杆纵向运动	纵向位移为 $u/(x-L)$	$\sqrt{E/\rho}$ $E$ —杨氏模量, $\rho$ —质量密度
均匀直杆扭转运动	扭转角	$\sqrt{K_T/J}$ $K_T$ —扭转刚度, $J$ —截面转动惯量
均匀弹性介质平面剪切波	横向位移	$\sqrt{\mu/\rho}$ $\mu$ —剪切模量, $\rho$ —质量密度
均匀弹性介质平面压缩波	纵向位移	$\sqrt{\lambda+2\mu/\rho}$ $\lambda, \mu$ —拉梅常数, $\rho$ —质量密度

不过, 并非所有一维波动问题的运动微分方程都可以简化为标准波动方程 (8) 的形式。例如, 任意变截面直杆中纵波传播的运动微分方程 (14) 一般不可能直接化为 (8) 的形式。当然, 对这一情形我们可以把直杆化为若干小段, 每一小段近似用正锥形杆代替, 则每一小段直杆中的纵波可用标准波动方程一般解按式 (18) 构成。方程 (8) 的一般解 (12) 表

示的波动称为定型波,即在传播过程中波形不变,或者更一般地说,在波传播途径上任意两质点振动的形式是相同的。但是在某些情形下,波在传播过程中波形和振动形式都要改变。这类一维波动不能用式(8)描述,例如弯曲变形杆中的一维波动是一例。不过上面讨论的波传播的基本概念(如波动自变量的表达式)仍然有效,只有波速 $c$ 不再完全取决于介质,而与振动的频率有关(见1.4节)

最后,我们可以利用一般解(12)对线弹性理论的适用范围提供一个判据。设质点运动位移为 $u=f(x-ct)$ ,则质点运动速度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

众所周知,线弹性理论的适用条件是 $|\partial u / \partial x| \ll 1$ ,将上式代入这一条件得

$$|\frac{\partial u}{\partial t}| \ll c \quad (19)$$

式(19)表明,只有当质点速度远小于波速时线弹性理论才能用于分析波动现象。由于地壳岩石中波速达每秒几公里量级,当地震波穿过地球介质时质点运动速度通常不超过每秒1m量级,将线弹性理论用于研究地壳岩石中地震波的传播是合理的。

(持续)

• 简讯 •

## 《旧金山地震灾害》一书出版发行

1989年10月17日,美国旧金山湾岸地区发生了7.1级地震(命名为Ooma Prieta地震),是一次袭击高度信息化现代化城市的较强烈的地震。在旧金山市等城市及其周围地区产生许多城市型地震灾害,造成经济损失总额达80亿~100亿美元。旧金山地震的灾害给人们提供了许多有益的经验和教训。

《旧金山地震灾害》一书共收入15篇论文或报告,插图和照片70余幅,15万字左右。该书的内容分两部分,第一部分是全面地介绍旧金山地震的震源过程、震害与地基的关系、公路和桥梁的灾害、建筑结构和建筑物的灾害、城市生命线工程的灾害等,及其发生灾害原因和对社会、经济的影响;第二部分是介绍日本东京都根据以往的地震防御、减灾的经验及这次旧金山地震灾害的教训,提出的加强东京都的震害综合防御和城市生命线工程地震对策的一系列措施。它为我们提供了一份有关城市地震灾害,特别是城市生命线工程的震害对人民生活和社会、经济活动影响的有参考价值的地震科技文献。从中,可吸取旧金山地震灾害的教训,借鉴国外防止和减轻城市地震灾害的对策与措施,有助于促进地震减灾工作的发展,提高城市的地震综合防御能力。

《旧金山地震灾害》一书由广东省地震局赵仕万、上海地震局潘元振等编译,常宝琦校译,国家地震局震害防御司李裕澈副司长写前言。该书现已由北京海洋出版社出版,1992年5月份在国内公开发行,宜于地震、地质、环保、城市规划和建设、建筑工程、政府机关防灾部门及科研教学单位等的科技人员阅读参考。单位和个人均可订购,欲订购者,可与广东省地震局情报资料室联系。

(广东省地震局情报资料室 赵仕万)